

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 11 februarie 2012

Clasa a XII-a

1). Tekintsük a (G, \cdot) csoportot és a $H = \{x^2 \mid x \in G\}$ halmazt. Mutasd ki, hogy ha G kommutatív csoport, akkor a H részcsoporthja G -nek. Az állítás reciproka igaz-e?

2). Tekintsük az $*$: $(-1,1) \times (-1,1) \rightarrow \mathfrak{R}$ műveletet úgy, hogy $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, $x, y \in (-1,1)$.

a) Mutasd ki, hogy $((-1,1), *)$ algebrai struktúra kommutatív csoport.

b.) Mutasd ki, hogy az $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ függvény izomorfizmus az $((-1,1), *)$, $((0,+\infty), \cdot)$

csoportok között.

c) Számítsd ki: $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{n}$.

3). Számítsd ki az:

$$I(x) = \int \frac{\cos^3 x \cdot \sin x}{1 + \cos^2 2x} dx \text{ és } J(x) = \int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx \text{ integrálokat, } x \in (0, \frac{3\pi}{4}).$$

4). Legyen az $I \subseteq \mathfrak{R}$ intervallum és az $f, g: I \rightarrow \mathfrak{R}$ függvények, melyek az

I intervallumon primitiválhatók. Mutasd ki, hogy létezik egy $A \subset I$ részhalmaz úgy, hogy: $f(x) = g(x)$, $\forall x \in I - A$

MEGJEGYZÉS: Minden feladat kötelező. Minden feladat 7 pontot ér. Munkaidő: 3 óra